4次元空間内のトーラスのフェルミ曲線とその無限小ダルブー変換 : Grinevich-Taimanov の研究の紹介(部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり)

AUTHOR(S):

乙藤, 隆史

数理解析研究所講究録
第 1577 巻 2008 年 104-116

4 次元空間内のトーラスのフェルミ曲線とその無限小ダルブー変換 (Grinevich-Taimanov の研究の紹介)

日本大学・工学部　乙藤　隆史 (Takashi Otofuji)
College of Engineering, Nihon University

1 序

M. U. Schmidt は論文 [Sch02] において Willmore 予想[*1]の解決を宣言した。Schmidt のアプローチは Taimanov によるアイデアを出発点としている。すなわち、

(1) $\mathbb{R}^3$ ないし $\mathbb{R}^4$ へのトーラスのはめ込み

に

(2) ポテンシャル付 Dirac 作用素とその 0-固有関数の組

そして

(3) ポテンシャル付 Dirac 作用素のフェルミ曲線

を順に対応させ、データ (3) の集合上で変分問題を考察するのである。

(1) から (2) の対応は、劔持-Weierstrass 型表現公式によって与えられる。この公式を Konopelchenko[K00] による Dirac 作用素を用いた形で述べるこ

[*1] Willmore 予想の歴史については安藤氏の論説 [An] が良い。

とが、(2) から (3) に移行するために必要である。また、(3) におけるフェルミ曲線とは本論説では、0-Floquet 固有関数の multiplier の集合を指していうことにする。(通例では、一つの multiplier に対し複数の独立な 0-Floquet 固有関数が存在する場合は、その multiplier は多重である。よって、multiplier の集合を正規化したものをフェルミ曲線ないしはスペクトル曲線と呼んでいる (スペクトル、といっても固有値 0 の部分のみである)。)

データ (1) の集合には、$\bar{\mathbb{R}}^3$、$\bar{\mathbb{R}}^4$ の共形変換が作用するが、Willmore 汎関数がこの作用で不変であることは $\mathbb{R}^3$ の場合よく知られている。この作用はデータ (3) の集合上には自明に作用する、というのが、本論説で解説する Grinevich-Taimanov[Gr-Ta07] の主定理である。

なお、$\mathbb{R}^3$ の場合の不変性の証明は [Gr-Sc97] が与えている。[Gr-Sc97] によれば、元々は Taimanov の予想で、Pinkall も独自に証明していた、とのことである。

解集合上の作用としては、共形変換群の作用のほかに、データ (2) の集合には Davey-Stewartson 階層 ($\mathbb{R}^4$ の場合)、変形 Novikov-Veselov 階層 ($\mathbb{R}^3$ の場合) による作用がある。$\mathbb{R}^4$ の場合、これがデータ (1)(但し $\mathbb{C}$ の単連結領域の場合) に作用を引き起こすことを Konopelchenko[K00] が注意した。Taimanov [Ta05] はこれがトーラスのはめ込みの変形を与える条件を考察している。大仁田氏の論説 [Oh08] にあるように、これらの作用はフェルミ曲線のモジュライ空間の考察において重要な役割を担っているように思われる。

2 剱持-Weierstrass 型表現公式とフェルミ曲線

2.1 剱持-Weierstrass 型表現公式: $\mathbb{C}$ の単連結領域の場合

Konopelchenko[K00] による形で、剱持-Weierstrass 型表現公式を $\mathbb{R}^4$ 内の曲面について述べる。まず、データ (2) からデータ (1) を導く。

Ω を複素平面 $\mathbb{C}$ の単連結領域、$z = x + iy$ は $\mathbb{C}$ の複素座標とする。U を Ω 上定義された複素数値 C^∞ 関数とする。

2つのポテンシャル付 Dirac 作用素 $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}^\vee$ を

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} U & \partial \\ -\bar{\partial} & \bar{U} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{D}^\vee = \begin{pmatrix} \bar{U} & \partial \\ -\bar{\partial} & U \end{pmatrix}$$

で定義する。ここで、$\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ である。$\mathscr{D}$ と $\mathscr{D}^\vee$ は形式的エルミート共役である。

Ω 上の $\mathbb{C}^2$ 値関数 $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$、$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ は

$$\mathscr{D}\psi = 0, \quad \mathscr{D}^\vee \varphi = 0$$

を満たすとする。このとき、

$$f_1 = \frac{i}{2}(\bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2 + \varphi_1\psi_1), \quad f_2 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2 - \varphi_1\psi_1),$$
$$f_3 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_2\psi_1 + \varphi_1\bar{\psi}_2), \quad f_4 = \frac{i}{2}(\bar{\varphi}_2\psi_1 - \varphi_1\bar{\psi}_2)$$

とおくと、1-形式

$$\eta_k = f_k dz + \bar{f}_k d\bar{z}, \quad k = 1,2,3,4,$$

は閉形式で、

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^4), \quad x^k = x^k(p) + \int_p \eta_k, \; k = 1,2,3,4, \; p \in U$$

は $\mathbb{R}^4$ 内の曲面を定める。

$\mathbb{R}^4$ から誘導される曲面上の計量は

$$e^{2\alpha}dzd\bar{z} = (|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dzd\bar{z}$$

と表され、平均曲率ベクトル $\mathbf{H} = \frac{2x_{z\bar{z}}}{e^{2\alpha}}$ とポテンシャル U との間には

$$|U| = \frac{|\mathbf{H}|e^{\alpha}}{2}.$$

の関係がある。

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面は、$U=\bar{U}(\mathscr{D}=\mathscr{D}^{\vee})$, そして $\psi=\varphi$ の場合として得られる。($x^4=0$ となる。)

次に、データ (1) からデータ (2) を導く。

$x=(x^1,x^2,x^3,x^4):\Omega\to\mathbb{R}^4$ を共形はめ込みとする。共形性より

$$\langle x_z, x_z\rangle = \sum_{k=1}^{4}(x_z^k)^2 = 0$$

が成り立っている。いま、$\mathbb{C}P^3$ の同次座標を $(y^1;y^2;y^3;y^4)$ で表し、$Q\subset\mathbb{C}P^3$ を

$$(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2+(y^4)^2=0$$

で定義する。$(x_z^1;\ x_z^2;\ x_z^3;\ x_z^4)\in Q$ である。そして、双正則写像

$$\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1\to Q\subset\mathbb{C}P^3:((a_1:a_2),(b_1:b_2))\mapsto(y^1;y^2;y^3;y^4)$$

を

$$y^1=\frac{i}{2}(a_2b_2+a_1b_1),\quad y^2=\frac{1}{2}(a_2b_2-a_1b_1),$$
$$y^3=\frac{1}{2}(a_2b_1+a_1b_2),\quad y^4=\frac{i}{2}(a_2b_1-a_1b_2)$$

で定める (Segré 埋め込み)。この双正則写像による同一視の下で

$$(x_z^1;\ x_z^2;\ x_z^3;\ x_z^4)=(G_\psi,G_\varphi)$$

$$G_\psi=(\psi_1:\bar{\psi}_2)\in\mathbb{C}P^1,\quad G_\varphi=(\varphi_1:\bar{\varphi}_2)\in\mathbb{C}P^1$$

と表しておく。さて、G_ψ の $\mathbb{C}^2\backslash(0,0)$ への持ち上げ $(\psi_1, \bar{\psi_2})$ を一つ選ぶと

$$x_z^1 = \frac{i}{2}(\bar{\varphi_2}\bar{\psi_2} + \varphi_1\psi_1), \quad x_z^2 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi_2}\bar{\psi_2} - \varphi_1\psi_1),$$
$$x_z^3 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi_2}\psi_1 + \varphi_1\bar{\psi_2}), \quad x_z^4 = \frac{i}{2}(\bar{\varphi_2}\psi_1 - \varphi_1\bar{\psi_2}).$$

が成り立つような G_φ の $\mathbb{C}^2\backslash(0,0)$ への持ち上げ $(\varphi_1, \bar{\varphi_2})$ が定まる。これらの持ち上げは

$$(\bar{\varphi_2}\psi_1)_{\bar{z}} = (\bar{\varphi_1}\psi_2)_z, \quad (\bar{\varphi_2}\bar{\psi_2})_{\bar{z}} = -(\bar{\varphi_1}\bar{\psi_1})_z$$

を満たすが、さらにあるポテンシャル U に対する Dirac 方程式 $\mathscr{D}\psi = 0$, $\mathscr{D}^\vee\varphi = 0$ をみたすように、持ち上げを取り直すことが出来る。実際、G_ψ の持ち上げとしてとりあえず

$$(s_1, \bar{s_2}), \quad s_1 = e^{i\theta}\cos\eta, \quad s_2 = \bar{s_2} = \sin\eta$$

を取っておき ($\frac{1}{2}\theta, \eta$ は π の整数倍の差を除いて一意に決まる)、

$$(\psi_1, \bar{\psi_2}) = (e^g s_1, e^{\bar{g}} s_2)$$

と取り直すことにする。

(1) $$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta+g}\cos\eta \\ e^{\bar{g}}\sin\eta \end{pmatrix}$$

があるポテンシャル U に対する Dirac 方程式 $\mathscr{D}\psi = 0$ を満たすためには、g が

$$g_{\bar{z}} + i\theta_{\bar{z}}\cos^2\eta = 0$$

を満たせばよく (この $\bar{\partial}$ 問題は領域 Ω 上で解ける)、このときポテンシャル U は

$$U = -e^{\bar{g}-g-i\theta}(i\theta_z\sin\eta\cos\eta + \eta_z)$$

と表せる。そして、この G_ψ の持ち上げから定まる G_φ の持ち上げ $(\varphi_1, \bar{\varphi_2})$ に対し、$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ は同じ U に対する $\mathscr{D}^\vee\varphi = 0$ を満たす。

g の取り方は正則関数 h の差の違いの自由度がある。よって

$$\psi \to \psi' = \begin{pmatrix} e^h \psi_1 \\ e^{\bar{h}} \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \to \varphi' = \begin{pmatrix} e^{-h} \varphi_1 \\ e^{-\bar{h}} \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad U \to U' = U^{\bar{h}-h}$$

と取り換えることができる。

2.2 剱持-Weierstrass 型表現公式: 領域がトーラスの場合

次に、2 次元トーラスからのはめ込みを考察する。

Λ を $\mathbb{C}$ の格子とし、$T = \mathbb{C}/\Lambda$ と表すことにする。Λ の基底 γ_1, γ_2 を取っておく。$x : T \to \mathbb{R}^4$ を共形的はめ込みとする。

[Ta05] で次の命題が示されている：

x に対し、次の諸条件をみたす $\mathbb{C}^2$ 値関数 ψ, φ と Λ-周期的な $\mathbb{C}$ 値関数 U が存在する：

1) $\mathscr{D}\psi = 0$, $\mathscr{D}^{\vee}\varphi = 0$;

2) ψ, φ は剱持-Weierstrass 型表現公式によって x の普遍被覆 $\tilde{x} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4$ を与える；

そして、このような ψ, φ, U は変換

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^h \psi_1 \\ e^{\bar{h}} \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{-h} \varphi_1 \\ e^{-\bar{h}} \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad U \to e^{\bar{h}-h} U$$

を除いて一意に定まる。ここで h は

$$h(z) = a + bz, \quad \text{但し } Im(b\gamma) \in \pi\mathbb{Z}, \ \forall \gamma \in \Lambda.$$

の形の正則関数である。

□

証明の概略を述べる。2.1 節で

$$g_{\bar{z}} + i\theta_{\bar{z}} \cos^2 \eta = 0$$

を g について解いた。$\theta_{\bar{z}}\cos^2\eta$ が Λ-周期的であることから、g は一般に

$$g = h(z) + c\bar{z} + f(z,\bar{z})$$

の形で求まることが分かる。ここで、$h(z)$ は任意の正則関数、f はある Λ-周期関数、そして c は $c = -\dfrac{1}{vol(\mathbb{C}/\Lambda)}\displaystyle\int_T i\theta_{\bar{z}}\cos^2\eta\, dxdy$ で定まる定数である。

そして、U が Λ-周期的になるためには、g がさらに

$$\text{(2)} \qquad g = a + bz + c\bar{z} + (\Lambda\text{-周期関数}) \quad (\text{すなわち } h = a + bz)$$

の形をしていて、かつ $(\bar{g}(\gamma) - g(\gamma)) \in 2\pi i\mathbb{Z},\ \forall\gamma\in\Lambda$ をみたすことが必要十分である。

3 無限小ダルブー変換

$p(z)$, $q(z)$ を Λ-周期的な $\mathbb{C}$ 上の関数として

$$L = \begin{pmatrix} -q & \partial \\ -\bar{\partial} & p \end{pmatrix},\ L^{\vee} = \begin{pmatrix} p & \partial \\ -\bar{\partial} & -q \end{pmatrix},\ p = p(z),\ q = q(z).$$

とおく。($-q = U$, $p = \bar{U}$ の場合、$L = \mathscr{D}$, $L^{\vee} = \mathscr{D}^{\vee}$ である。)

L の 0-固有関数 Ψ で

$$\Psi(z+\gamma_1) = \kappa_1\Psi(z),\ \Psi(z+\gamma_2) = \kappa_2\Psi(z)$$

なる複素数 κ_1, κ_2 が存在するものを 0-Floquet 固有関数と呼ぶ。(κ_1, κ_2) を Ψ の multiplier という。multiplier 全体の集合、すなわち

$$\Gamma = \{(\kappa_1,\kappa_2) \in \mathbb{C}^2 \mid (\kappa_1,\kappa_2)\ \text{はある 0-Floquet 固有関数の multiplier}\}$$

を L のフェルミ曲線とよぶことにする。$L^{\vee}$ のフェルミ曲線を $\Gamma^{\vee}$ であらわす。multiplier をフェルミ曲線上動かして得られる 0-Floquet 固有関数の族を、0-Floquet–Bloch 固有関数と呼ぶ。

さて、無限小ダルブー変換を定義する。

- multiplier $\kappa_1(\lambda)$, $\kappa_2(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma$ を持つ L の 0-Floquet–Bloch 固有関数 $\psi(\lambda,z) = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda,z) \\ \psi_2(\lambda,z) \end{pmatrix}$ と
- multiplier $\kappa_1^\vee(\mu)$, $\kappa_2^\vee(\mu)$, $\mu \in \Gamma^\vee$ を持つ $L^\vee$ の 0-Floquet–Bloch 固有関数 $\phi(\mu,z) = \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda,z) \\ \phi_2(\lambda,z) \end{pmatrix}$

の無限小変形を次のようにして定義する。

まず、$L, L^\vee$ の 0-Floquet 固有関数

$$\Psi^D = \begin{pmatrix} \Psi_1^D(z) \\ \Psi_2^D(z) \end{pmatrix}, \; \Phi^D = \begin{pmatrix} \Phi_1^D(z) \\ \Phi_2^D(z) \end{pmatrix}$$

で

$$\Psi^D(z+\gamma_i) = \hat{\kappa}_i \Psi^D(z), \;\; \Phi^D(z+\gamma_i) = \frac{1}{\hat{\kappa}_i}\Phi^D(z), \;\; i = 1,2,$$

を満たすものを用意する。

このとき、

$$d\omega(\lambda,z) = \Phi_1^D(z)\psi_1(\lambda,z)dz - \Phi_2^D(z)\psi_2(\lambda,z)d\bar{z}$$

$$d\omega^\vee(\mu,z) = \phi_1(\mu,z)\Psi_1^D(z)dz - \phi_2(\mu,z)\Psi_2^D(z)d\bar{z}$$

をみたす関数 $\omega(\lambda,z)$, $\omega^\vee(\mu,z)$ が定数 $c(\lambda)$, $c^\vee(\mu)$ の差を除いて一意に決まる (各右辺が閉形式であることが確かめられる。) さらにこれらの定数 $c(\lambda)$, $c^\vee(\mu)$ も次のようにして定めることができる。すなわち

$\kappa_1(\lambda)/\hat{\kappa}_1 \neq 1$ かつ $\kappa_2(\lambda)/\hat{\kappa}_2 \neq 1$ ならば $\omega(\lambda,z)$ は Floquet–Bloch 条件:

$$\omega(\lambda,z+\gamma_i) = \frac{\kappa_i(\lambda)}{\hat{\kappa}_i}\omega(\lambda,z).$$

で一意に決まる。同様に

$\kappa_1^\vee(\mu)\hat{\kappa}_1 \neq 1$ かつ $\kappa_2^\vee(\mu)\hat{\kappa}_2 \neq 1$ ならば $\omega^\vee(\mu,z)$ は Floquet–Bloch 条件:

$$\omega^\vee(\mu,z+\gamma_i) = \kappa_i^\vee(\mu)\hat{\kappa}_i\omega^\vee(\mu,z).$$

で一意に決まる。

以上のデータの下で、$\psi(\lambda,z),\phi(\mu,z)$ の無限小ダルブー変換を

$$\delta\psi(\lambda,z)=\omega(\lambda,z)\Psi^D(z),\ \ \delta\phi(\mu,z)=\omega^\vee(\mu,z)\Phi^D(z)$$

で定義する。

次が成立する：

1. $\psi(\lambda,z),\phi(\mu,z)$ の無限小ダルブー変換から引き起こされる $L,L^\vee$ の変形 $\delta L,\delta L^\vee$ は

$$\delta L=\begin{pmatrix} -\Psi_2^D(z)\Phi_1^D(z) & 0 \\ 0 & -\Psi_1^D(z)\Phi_2^D(z) \end{pmatrix},$$
$$\delta L^\vee=\begin{pmatrix} -\Psi_1^D(z)\Phi_2^D(z) & 0 \\ 0 & -\Psi_2^D(z)\Phi_1^D(z) \end{pmatrix},$$

すなわち

$$\delta p(z)=-\Psi_1^D(z)\Phi_2^D(z),\ \ \delta q(z)=\Psi_2^D(z)\Phi_1^D(z)$$

である。特に、$L,L^\vee$ の対称性を保つ。

2. $\omega(\lambda),\ \omega^\vee(\mu)$ が先の Floquet–Bloch 条件をみたすように正規化してあれば、$\delta\psi(\lambda),\ \delta\phi(\mu)$ は multiplier を保つ。よって、無限小ダルブー変換はこのときフェルミ曲線 $\mathscr{M}(\Gamma),\mathscr{M}(\Gamma^\vee)$ を保つ。

□

4　$\overline{\mathbb{R}}^4$ の共形変換によるフェルミ曲線の不変性

$\mathbb{R}^4$ の一点コンパクト化を $\overline{\mathbb{R}}^4$ で表す。共形的に $\overline{\mathbb{R}}^4\cong S^4$ とみなす。$\overline{\mathbb{R}}^4$ の（向きを保つ）共形変換は、一点に関する拡大、平行移動、回転、そして複数個の反転の合成によって表されることが知られている (リューヴィルの定理)。拡大、平行移動、回転によるフェルミ曲線の不変性は容易にわかる。そして、これらの変換によって二つの反転互いに共役なので、原点中心の反

転と一つの座標軸上にある点中心の反転の合成に関して不変性を示せば十分である。

さて、剱持-Weierstrass 型表現公式

$$\partial_z x^1 = \frac{i}{2}(\bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2 + \varphi_1\psi_1), \quad \partial_z x^2 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2 - \varphi_1\psi_1),$$
$$\partial_z x^3 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_2\psi_1 + \varphi_1\bar{\psi}_2), \quad \partial_z x^4 = \frac{i}{2}(\bar{\varphi}_2\psi_1 - \varphi_1\bar{\psi}_2).$$

で与えられたはめ込み $\mathbb{R}^2/\Lambda \mapsto \mathbb{R}^4$ があるとする。ここで、ψ, φ は 2.1 節、2.2 節で構成したものをとることにする。2.1 節の式 (1)、2.2 節の式 (2) より、

$$\psi_1(z+\gamma_i) = \kappa_i\psi_1(z), \quad \psi_2(z+\gamma_i) = \bar{\kappa}_i\psi_2(z),$$
$$\varphi_1(z+\gamma_i) = \frac{1}{\kappa_i}\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z+\gamma_i) = \frac{1}{\bar{\kappa}_i}\varphi_i(z), \quad i=1,2.$$

をみたす２つの複素数 κ_1, κ_2 の存在がわかり、しかも周期条件をみたす微分方程式:

$$\mathscr{D}\psi = 0, \ \mathscr{D}^\vee\varphi = 0$$

を満たしていることからこの multiplier は実数、すなわち $\kappa_i = \bar{\kappa}_i$, $i=1,2$ であることが導かれる。したがって

$$\psi(z+\gamma_i) = \hat{\kappa}_i\psi(z), \quad \varphi(z+\gamma_i) = \frac{1}{\hat{\kappa}_i}\varphi(z), \quad \hat{\kappa}_i \in \mathbb{R}, \ i=1,2,$$

であり、前節で述べた無限小ダルブー変換の枠組みに乗せることが出来る。

さて、$L, L^\vee$ は次の式で与えられる２つの無限小ダルブー変換の和

$$\partial_\tau = \partial_{\tau_1} + \partial_{\tau_2}$$

とする。ここで ∂_{τ_1} は

$$\Psi^D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \ \Phi^D = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2 \\ -\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix}$$

で生成され、一方 ∂_{τ_2} は

$$\Psi^D = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_2 \\ -\bar{\psi}_1 \end{pmatrix}, \ \Phi^D = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

で生成されるものとする。

このとき次が成り立つ：

1. ∂_τ は等スペクトル変形を与え、しかも reality 条件を保つ。そして

$$\partial_\tau U = \varphi_1\bar{\psi}_1 - \bar{\varphi}_2\psi_2,\quad \partial_\tau \bar{U} = \bar{\varphi}_1\psi_1 - \varphi_2\bar{\psi}_2,$$

である。

2. Ψ と Φ に対する ω、$\omega^\vee$ が条件 $\omega(0)=0, \omega^\vee(0)=0$ をみたすように取ってあれば

$$\begin{aligned}
\partial_\tau\psi_1 &= (x^3-ix^4)\psi_1 - i(x^1-ix^2)\bar{\psi}_2\\
\partial_\tau\psi_2 &= (x^3-ix^4)\psi_2 + i(x^1-ix^2)\bar{\psi}_1\\
\partial_\tau\varphi_1 &= (x^3+ix^4)\varphi_1 - i(x^1-ix^2)\bar{\varphi}_2\\
\partial_\tau\varphi_2 &= (x^3+ix^4)\varphi_2 + i(x^1-ix^2)\bar{\varphi}_1.
\end{aligned}$$

が成り立つ。

以上より、この無限小作用は次の無限小共形変換

$$\begin{aligned}
\partial_\tau x^1 &= 2x^1x^3\\
\partial_\tau x^2 &= 2x^2x^3\\
\partial_\tau x^3 &= (x^3)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^4)^2\\
\partial_\tau x^4 &= 2x^4x^3.
\end{aligned}$$

から引き起こされるものであることがわかる。この形がどのような共形変換の１パラメータ族を微分して得られるか、節を改めて述べることにする。ともあれ、これで $\overline{\mathbb{R}^4}$ の共形変換によるフェルミ曲線の不変性が示されたことになる。

5　補足：$\overline{\mathbb{R}^n}$ の無限小反転の表示

$z\in\mathbb{R}^n$ $(n=2,3,4,\dots)$ とし、

$p\in\mathbb{R}^n$ を固定する。

$$i_p : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n : z \longmapsto \frac{z-p}{|z-p|^2}$$

は、点 p を中心とする半径 1 の球に関する反転に平行移動 $z \mapsto z-p$ を合成したものである。i_0 に i_p を合成した写像は

$$\begin{aligned}(i_p \circ i_0)(z) = & \frac{\frac{z}{|z|^2} - p}{|\frac{z}{|z|^2} - p|^2} \\ = & \frac{z - |z|^2 p}{|z - |z|^2 p|^2} \cdot |z|^2 \\ = & \frac{z - |z|^2 p}{|z|^2 + |p|^2|z|^4 - 2\langle z, p\rangle |z|^2} \cdot |z|^2 \\ = & \frac{z - |z|^2 p}{1 + |p|^2|z|^2 - 2\langle z, p\rangle}\end{aligned}$$

と表される。ここで、$p = t\mathbf{e}_i$, $t \in \mathbb{R}$ とおく ($\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底)。

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dt}|_{t=0}(i_{t\mathbf{e}_i} \circ i_0)(z) \\ = & \left\{ \frac{(z - |z|^2 t\mathbf{e}_i)'}{1 + |t\mathbf{e}_i|^2|z|^2 - 2\langle z, t\mathbf{e}_i\rangle} - \frac{(z - |z|^2 t\mathbf{e}_i)(1 + |t\mathbf{e}_i|^2|z|^2 - 2\langle z, t\mathbf{e}_i\rangle)'}{(1 + |t\mathbf{e}_i|^2|z|^2 - 2\langle z, t\mathbf{e}_i\rangle)^2} \right\}|_{t=0} \\ = & -|z|^2\mathbf{e}_i - (-2z_i)z\end{aligned}$$

となる。たとえば $n=4$, $i=3$ のとき

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(i_{t\mathbf{e}_3} \circ i_0)(z) = \begin{pmatrix} 2z_3z_1 \\ 2z_3z_2 \\ 2z_3z_3 - \sum_{k=1}^4 (z_k)^2 \\ 2z_3z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_3z_1 \\ 2z_3z_2 \\ (z_3)^2 - (z_1)^2 - (z_2)^2 - (z_4)^2 \\ 2z_3z_4 \end{pmatrix}$$

である。

参考文献

[An] 安藤直也: Willmore 予想について. TMUGS「WHAT IS GEOMETRY?」所収, http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/wig/index-j.html

[An-Tan07] 安藤直也, 谷口哲也: Willmore 予想およびその書き換え $\sim E^3$ にはめこまれたトーラス上の Dirac 作用素およびその複素 Fermi

曲線 ~. 数理解析研究所講究録 1527「部分多様体論のさらなる発展にむけて」(2007), 74-99

[Gr-Sc97] Grinevich, P.G., and Schmidt, M.U.: Conformal invariant functionals of immersions of tori into $\mathbb{R}^3$. J. Geom. Phys. 26 (1997), 51–78.

[Gr-Ta07] Grinevich, P.G., Taimanov, I.A.: Infinitesimal Darboux transformations of the spectral curves of tori in the four-space. Int. Math. Res. Not. 2007, No. 2, (2007), math/0611215.

[K00] Konopelchenko, B.G.: Weierstrass representations for surfaces in 4*D* spaces and their integrable deformations via DS hierarchy. Annals of Global Anal. and Geom. 16 (2000), 61–74.

[Oh-Ot-U07] 大仁田義裕, 乙藤隆史, 宇田川誠一: Modili spaces of complex Fermi curves and the Willmore functional. 数理解析研究所講究録 1527「部分多様体論のさらなる発展にむけて」(2007), 100-127

[Oh08] 大仁田義裕: Willmore conjcture and integrable systems (after M. U. Schmidt and I. A. Taimanov etc.), 本講究録所収

[Sch02] M. U. Schmidt: A proof of the Willmore conjecture. math.DG/0203224.

[Ta06] Taimanov, I.A.: Two-dimensional Dirac operator and surface theory. Russian Mathematical Surveys 61:1 (2006), 79-159, math/0512543

[Ta05] Taimanov, I.A.: Surfaces in the four-space and the Davey-Stewartson equations. Journal of Geometry and Physics 56 (2006), 1235-1256, math/0401412 .

College of Engineering, Nihon University, Koriyama, Fukushima, 963-8642 JAPAN

e-mail : otofuji@ge.ce.nihon-u.ac.jp